

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазинова Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

6-дәріс. Ұйытқымаған орбиталарды анықтау

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға екі дененің шектеулі есебі ұғымын және оның орбитаны анықтаудағы рөлін түсіндіру; Гамильтон–Якоби әдісі арқылы екі дене есебін интегралдау тәсілдерін меңгерту; сондай-ақ орталық күш әсерінен болатын қозғалыстың физикалық мағынасын, математикалық сипаттамасын және орбиталық заңдылықтарын үйрету.

Жоспар

1. Екі дененің шектеулі есебі. Орбитаны анықтау
2. Гамильтон-Якоби әдісі арқылы екі дене есебін интегралдау
3. Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс

1. Екі дененің шектеулі есебі. Орбитаны анықтау

Екі дене есебін бастапқы және шектеулі шарттар арқылы шешуге болады.

Астрометриялық бақылаулар тек қана аспан денесіне бағытын көрсетеді. Аспан денесінің екі бұрыштық координаттары беріледі. Сондықтан орбитаның 6 элементін анықтау үшін кемінде үш бақылаудың нәтижесі қажет (тек шеңберлік орбита кезінде екі бақылау жеткілікті). Орбита элементтерін анықтау үшін шектеулі шарттар қажет: $t_{1,2}$ уақыт мезетінде бұрыштық координаттар (экваториалды α_k, β_k) арқылы $\vec{r}_{1,2}$ радиус-векторларының мәндері.

Үш бақылау арқылы эллипстік орбитаны Гаусс әдісімен анықтайды. Радиус-векторлар бір жазықта орналасқандықтан

$$\vec{r}_0 = c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2,$$

c_1, c_2 коэффициенттерінің мәндері $\vec{r}_k$ векторлар арқылы құрастырылған үшбұрыштар аудандарының қатынастарына тең. Және осы кезде Кеплердің екінші заңы бойынша эллипстік секторлар үшін аудандардың қатынасы белгілі болады. Сонда, үшбұрыштың ауданының эллипстік сектордың ауданына қатынасы негізгі есеп ретінде қарастырылады. Бірақ эллипстік сектордың ауданы оның төбесінің координаттары арқылы берілмегендіктен, бұл есе өте күрделі болады. Есептің шешімін бірінші жуықтау (қозғалыс шеңберлік орбита бойымен болады) арқылы анықтайды. Осындай жуықтауды тек кіші планеталардың орбиталарын анықтау кезінде алады. Сонда бақылауларда орбита доғасының кіші бөлігі көрінеді және эксцентриситеттің мәні үлкен болмайды.

Параболалық орбитаны Ольберс әдісі арқылы анықтайды.

Орбитаны анықтаудың тағы бір әдісі – Ламберт теоремасы қолдану. Бұл теорема эллипс орбитаның бірнеше сипаттамасын байланыстырады:

1. a - үлкен жарты осін;
2. Екі нүктенің радиустарын $r_{1,2}$;

3. Екі нүкте арасындағы хорда ұзынғын c ;

4. Қозғалыстағы материалдық нүктенің r_1 және r_2 нүктелер арасындағы орбита доғасын өту уақытын $\Delta t = t_2 - t_1$.

Осы кезде доғаның мәні 180° кіші немесе үлкен болуын және $\vec{r}_{1,2}$ нүктелерді қосатын хорда, эллипстің үлкен осін қиып өту немесе өтпеуін ескеру қажет. Сол үшін қосымша шаманы енгіземіз: a_m - шектеулі эллипстің үлкен жарты осін. Осы шектеулі эллипстің ерекшелігі: P_1P_2 хорда оның басқа фокусы арқылы өтеді. Сонда

$$a_m = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + c). \quad (1)$$

Осы шектеулі орбита арқылы ұшып өту мерзімі

$$\Delta t_m = \frac{a_m^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\pi - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)]. \quad (2)$$

Сонда Ламберт теоремасы

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = a^{3/2} [\pi + \text{sign}(\Delta t_m - \Delta t)(\varepsilon - \sin \varepsilon) - \text{sign}(\sin \Phi)(\delta - \sin \delta)], \quad (3)$$

осында

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{a_m}{a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{a_m - 2c}{a}}, \quad c = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2}, \quad (4)$$

$$\Phi = \nu_2 - \nu_1, \quad (5)$$

Φ - $\vec{r}_{1,2}$ векторлар арасындағы бұрыш. Осы кезде $0 < \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Егер $\vec{r}_{1,2}$ векторлар белгілі болса, $\sin \Phi$ және $\cos \Phi$ осы векторлардың векторлық және скалярлық көбейтіндісі арқылы анықталады. Сонда a - үлкен жарты осіне байланысты теңдеу ретінде қарастыруға және сан ретінде шешімін табуға болады.

a шамасы белгілі болса, орбита параметрін анықтауға болады

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}{a \sin \frac{\varepsilon - \gamma}{2}}, \quad (6)$$

осында

$$\gamma = (\text{sign}(\Delta t_m - \Delta t) \cdot \text{sign}(\sin \Phi) \cdot \delta). \quad (7)$$

Орбитаның векторлық элементтері

$$\vec{P} = \frac{e + \cos \nu_{1,2}}{p} \cdot \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cdot \sin \nu_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,2}, \quad (8)$$

$$\vec{Q} = \frac{\sin \nu_{1,2}}{p} \cdot \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cdot \cos \nu_{1,2} \cdot \dot{\vec{r}}_{1,2}. \quad (9)$$

Осы теңдеулерден $\vec{r}_{1,2}$ жою арқылы, Ω, ω, i элементтерді анықтауға болады. $\vec{P}$ мен $\vec{Q}$ векторларды жою арқылы $\vec{r}_2$ және $\dot{\vec{r}}_2$ анықтауға болады

$$\vec{r}_2 = \left[1 - \frac{r_2}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_1 + \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_1 \quad (10)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \left[\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{p r_1} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_1. \quad (11)$$

Осы теңдеулерінде «2» индексін жазбағанда және «1» индексі орнына «0» индексін қойғанда, кез келген уақыт мезеті үшін, бастапқы шартына байланысты, радиус-вектор және жылдамдық векторының тәуелділіктері анықталады

$$\vec{r} = \left[1 - \frac{r}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \vec{r}_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (12)$$

$$\dot{\vec{r}} = \left[\frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{p r_0} (1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi \right] \cdot \vec{r}_0 + \left[1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \Phi) \right] \cdot \dot{\vec{r}}_0, \quad (13)$$

осында $\Phi = \nu - \nu_0$. Егер Ламберт теоремасында $a \rightarrow \infty$ кезінде шектеулі ауысу жасағанда Эйлер теоремасы пайда болады

$$6\sqrt{\mu} \Delta t = (r_1 + r_2 + c)^{3/2} - \text{sign}(\Phi)(r_1 + r_2 - c)^{3/2}. \quad (14)$$

Осы теорема Ольбертс әдісі бойынша параболалық орбитаны анықтау кезінде қолданылады.

Ламберт және Эйлер теоремалары орбита бойындағы бір нүктеден екіншісіне дейін кеткен ұшу уақытын есепетеу үшін қолданылады. Қазіргі уақытта қос жұлдыз жүйесінің орбитасын анықтау аспан механикасының негізгі есебі ретінде қарастырылады. Жүйе компоненттерінің қозғалысы бейнелік жазықтықтағы проекция ретінде бақыланады, сондықтан бұл есептің шешімі оңай жолмен табылмайды. Шешімін анықтау үшін қос

жүйенің типін ескеру қажет. Аспан механикасының тағы бір арнайы есебі – Күннің және Айдың тұтылуының уақытын анықтау.

2. Гамильтон-Якоби әдісі арқылы екі дене есебін интегралдау

Екі дене есебінің шешімін анықтау үшін алдыңғы дәрістерде бірінші интегралдар әдісі бойынша анықтауға мүмкіндігі көрсетілді. Енді екі дене есебінің шешімін Гамильтон-Якоби әдісін қолдана отырып сфералық координаттар арқылы табамыз.

Есептің потенциалы $V = \frac{\mu}{r}$ бір координатаға тәуелді болғандықтан, сфералық координат жүйесін қолданамыз. Осында бұрыштық координаттары φ - ендік, λ - бойлық. Бұл әдісті қолданар алдында r, λ, φ координаттарының R, Λ, Φ - жалпыландырылған импульстерін анықтау қажет.

q_i жалпыландырылған координатаға сәйкес келетін p_i жалпыландырылған импульсі

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (15)$$

осында L - Лагранж функциясы. Ол T - кинетикалық және V - потенциалды энергияларының айырмасына тең, немесе $L = T + V$.

Сфералық координаттары арқылы жазылған кинетикалық энергия

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2). \quad (16)$$

Сонда Лагранж функциясы

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}^2) + \frac{\mu}{r}. \quad (17)$$

Осыдан

$$R = \dot{r}, \quad \Phi = r^2 \dot{\varphi}, \quad \Lambda = r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}. \quad (18)$$

Консервативті есептерінде екі дене есебінің Гамильтон функциясы

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \cos^2 \varphi} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (19)$$

Гамильтон-Якоби теңдеуін жазу үшін S - әрекет шамасының уақыт және Гамильтон функциясы бойынша дербес туындылары қолданылады. Әрекеттің формуласы

$$S = W(q_i) - \alpha_1 t, \quad (20)$$

осында W - қисынды әрекет. Сонда Гамильтон-Якоби теңдеуі

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (21)$$

Енді осы теңдеудің жалпы интегралын табу үшін айнымалы шамаларын бөлеміз

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda) \quad (22)$$

және (21) теңдеуге енгізу арқылы

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial W_3}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (23)$$

Егер

$$\frac{\partial W_3}{\partial \varphi} = \alpha_3 \text{ және } \left(\frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi} = \alpha_2^2$$

болса

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \quad (25)$$

Осыдан қисынды әрекет

$$W = \alpha_3 \lambda + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr. \quad (26)$$

Есептің жалпы шешімі

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (27)$$

біздің жағдай үшін

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \alpha_1, \quad (28)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \quad (29)$$

$$\lambda - \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2 \varphi}}} = \beta_3. \quad (30)$$

α_i, β_i - интегралдаудың алты тұрақтысы, Гамильтон –Якоби формасындағы екі дене есебінің жалпы шешімін береді және **Якоби элементтері** деп аталады.

Осы Якоби элементтерінің Кеплер элементтерімен байланысын анықтау қажет. Сол үшін (27)-(29) интегралдарын есептеу керек.

Егер $\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} = \cos i$ ретінде қарастырсақ (30) теңдеуінде сәйкес ауыстырып, интегралдау және түрлендіру арқылы келесі байланысын аламыз

$$\tan \varphi = \tan i \cdot \sin(\lambda - \beta_3). \quad (31)$$

(31) формуласын $r \cos \varphi \cos i$ шамасына көбейтіп, декарт және сфералық белгілі байланыстарын ескере отырып

$$\sin \beta_3 \sin i \cdot x - \cos \beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0 \quad (32)$$

қозғалыс жазықтығының теңдеуін аламыз. Осында β_3 - түйіннің бойлығы және i бұрышы орбитаның еңкеюіне тең болады.

(32) теңдеуінің бірінші интегралын табу үшін интегралдау айнымалы шамасын ауыстырамыз

$$\sin \varphi = \sin i \sin u, \quad (33)$$

осында $u = \omega + \nu$. Сонда интегралдау арқылы келесі теңдеуін аламыз

$$\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = u - \beta_2. \quad (34)$$

$s = 1/r$ ауыстыру арқылы (34) интегралын есептейміз, сонда

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2} \cos(u - \beta_2)}}. \quad (35)$$

Салыстыру арқылы Кеплер элементтерін анықтаймыз

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu} = p, \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} = e, \beta_2 = \omega, \quad (36)$$

осыдан

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1). \quad (37)$$

Қосымша есептеулер арқылы келесі элементтерді анықтаймыз

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i \text{ немесе } \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \quad (38)$$

және

$$\beta_1 = -\tau, \Omega = \beta_3. \quad (39)$$

3. Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс

Екі дене есебінде күштің негізгі ерекшелігі – күштің әрекет сызығы бір ғана нүкте - тартылыс орталығы (центрі) арқылы өтеді. Сонда күшті осы түрінде жазуға болады

$$\vec{F} = F(r) \cdot \vec{r}^0, \quad (40)$$

$\vec{r}^0$ - $\vec{r}$ радиус-вектордың орты, $F(r)$ - күш функциясы. Оның модулі - күштің шамасын, таңбасы - әрекеттің сипаттамасын анықтайды.

Кез келген орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыстың есебін қарастырамыз. Осы күштің функциясы

$$F = F(r, \dot{r}, t), \quad (41)$$

r - арақашықтық, оның өзгеру жылдамдығына $\dot{r}$ және t уақытқа тәуелді болады. Осы есепті шығару арқылы орталық күш әсерінен және арақашықтыққа байланысты пайда болатын екі дене есебінің қасиеттерін анықтауға болады. Сонымен қатар осы есеп кейбір жағдайларда практикалық қолданыста болады. Мысалы: жұлдыздардың домалақ шоғырлануының ішіндегі жұлдыздың қозғалысын қарастырғанда F функцияның түрі осы шоғырланудағы жұлдыздар тығыздығының таралуымен анықталады.

Осы есептің салыстырмалы қозғалыс кезіндегі теңдеу

$$\ddot{\vec{r}} - F(r, \dot{r}, t) \cdot \vec{r}^0 = 0 \quad (42)$$

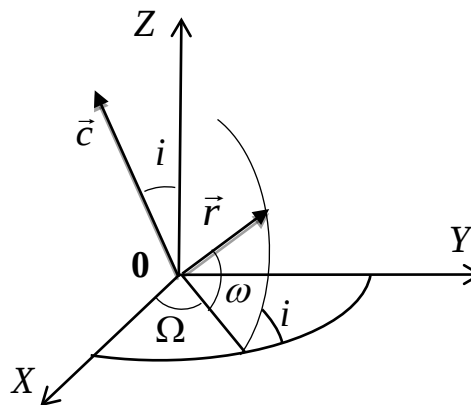
Осы теңдеудің сол жағындағы шамасын $\vec{r}$ радиус-векторына көбейткенде момент интегралы пайда болады

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (43)$$

Осыдан қозғалыстың жазықтық сипаттамасы орталық күш әрекетінен екенін байқалады.

$\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$ - қозғалыс жазықтығының теңдеуі. Қозғалыс жазықтығы болғандықтан, түйін сызығы және жазықтықтың кеңістіктегі орналасуын анықтайтын орбита элементтері (жоғарғы түйіннің бойлығы, орбита еңкею) туралы түсініктерді енгізуге болады (1 сурет). Сонда кинетикалық момент векторының компоненттері

$$\begin{aligned} c_1 &= c \sin \Omega \sin i, \\ c_2 &= -c \cos \Omega \sin i, \\ c_3 &= c \cos i. \end{aligned} \quad (44)$$



1 сурет – Орталық күш әсерінен пайда болатын қозғалыс

Және r, w полярлы орбиталды координаттарын енгізуге болады, осында полярлы бұрыш w жоғарғы түйінге бағытынан есептелінеді. w екі дене есебіндегі u ендік аргументінің аналогы ретінде болады.

Сонда радиус-вектор және оның ортының теңдеулері

$$\vec{r} = r(t) \cdot \vec{r}^0(w(t)), \quad \vec{r}^0 \equiv (\alpha(w(t)), \beta(w(t)), \gamma(w(t))). \quad (45)$$

Егер (45) уақыт бойынша дифференциалын анықтағанда

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{r}^0 + r \dot{\vec{r}}^0, \quad \ddot{\vec{r}} \equiv \ddot{r} \vec{r}^0 + 2\dot{r} \dot{\vec{r}}^0 \dot{w} + r \ddot{\vec{r}}^0 \dot{w}^2 + r \dot{\vec{r}}^0 \ddot{w}. \quad (46)$$

Осында «штрих белгісі» w бойынша туынды. Сонда

$$\vec{r}^{0'} = \vec{r}_\perp^0, \quad \vec{r}^{0''} = -\vec{r}^0, \quad (47)$$

$\vec{r}_\perp^0$ - $\vec{r}^0$ ортына перпендикуляр, қозғалыс жазықтығындағы орт.

Осы теңдеулерді бір біріне енгізу арқылы

$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\vec{r}^0 + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\vec{r}_\perp^0 = 0. \quad (48)$$

$\vec{r}^0$ және $\vec{r}_\perp^0$ бір бірінен сызықты тәуелсіз болғандықтан

$$\ddot{r} - r\dot{w}^2 = F, \quad (49)$$

$$r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w} = 0.$$

Сонда

$$r^2\dot{w} = c. \quad (50)$$

r радиус үшін теңдеу

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = F(r, \dot{r}, t) \quad (51)$$

және қозғалыс заңы

$$w = w_0 + c \int_{t_0}^t \frac{dt}{r(t)} = 0. \quad (52)$$

Егер F функциясы t уақытқа тәуелсіз болса, w - жаңа аргументке ауысу қажет. Осымен қатар, бейсызық құраушысын $r = \frac{1}{u}$ тәуелді шамасымен алмастыруға болады.

$\dot{r}$ және $\ddot{r}$ туындылары

$$\dot{r} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2u^2u'', \quad (53)$$

және осы теңдеуді (51) теңдеуіне енгізгенде, u кері арақашықтығы үшін теңдеуін аламыз

$$u'' + u = -\frac{1}{c^2u^2} F\left(\frac{1}{u'} - cu'\right). \quad (54)$$

Бұл теңдеу – *Бине теңдеуі*. Осы теңдеудің интегралын анықтауға болады, егер F функциясы тек u шамасына тәуелді болса. Осы кезде $p(u) = u'$ алмастыру жасалынады.

Сонда Бине теңдеуі

$$p \frac{dp}{du} + u = -\frac{1}{c^2u^2} F(u) \equiv \Phi(u). \quad (55)$$

Осы теңдеудің айнымалы шамалары бөлінеді, интегралдау арқылы

$$p^2 = p_0^2 - u^2 + u_0^2 + 2 \int_{u_0}^u \Phi(u) du. \quad (56)$$

$p(u) = u'$ теңдеуді шешу арқылы

$$w = w_0 + \int_{u_0}^u \frac{du}{p(u)} \quad (57)$$

және (50) теңдеуін қолдану арқылы келесі тәуелділікті анықтаймыз

$$\int_{w_0}^w \frac{dw}{u^2(w)} = s(t - t_0). \quad (58)$$

Осы теңдеу – орталық күш әрекетінен пайда болатын қозғалыс есебінің жалпы шешімі. Осы кезде тәуелділік тек $r = \frac{1}{u}$ болады және алты тәуелсіз интегралдау тұрақтыларын - $\vec{c}$, p_0 , u_0 , w_0 қолданамыз.

Сонда есептің шешімін басқа жолмен анықтауға болады, егер күштік функцияны келесі теңдеумен енгізсек

$$F(r) = \frac{dU}{dr}. \quad (59)$$

Бине теңдеуін u' шамасына көбейту арқылы, оның бірінші интегралын табамыз

$$c^2 u'^2 + c^2 u^2 = 2U + h. \quad (60)$$

(59) теңдеуінде r және t айнымалы шамаларына ауысамыз, сонда энергия интегралы

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{w}^2 = 2U + h. \quad (115)$$

Екі дене есебінде F функцияны келесі теңдеуімен аламыз

$$F = -\frac{\mu}{r^2} = -\mu u^2, \quad (61)$$

Сонда

$$u = \frac{\mu}{c^2} + A \cos(w + \omega), \quad (62)$$

осында $A = \frac{e\mu}{c^2}$, $\frac{\mu}{c^2} = p$ кеплер орбитасының белгілі теңдеуін аламыз

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(w - \omega)}. \quad (63)$$

Бақылау сұрақтары:

1. Екі дененің шектеулі есебі дегеніміз не және ол классикалық екі дене есебінен несімен ерекшеленеді?
2. Шектеулі екі дене есебінде қандай қарапайымдандырулар (болжамдар) қолданылады?
3. Орбитаны анықтау үшін қандай бастапқы шарттар мен параметрлер қажет?
4. Гамильтон–Якоби әдісінің мәні неде және ол қандай тендеуге негізделеді?
5. Екі дене есебін интегралдау кезінде қандай физикалық шамалар тұрақты болып табылады?
6. Орталық күш әсерінен қозғалыстың негізгі қасиеттері қандай?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы //Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.— Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.— 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.
5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.
6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.